

Università di Catania
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di laurea Magistrale in Matematica
Anno Accademico 2011-2012

Istituzioni di Fisica Matematica

G. MULONE

1. Equazioni differenziali della fisica matematica

Definizioni. Cenni sulle equazioni a derivate parziali del primo ordine. Classificazione delle equazioni del secondo ordine. Equazione del secondo ordine con coefficienti costanti. Riduzione in forma canonica. Riduzione di un'equazione del secondo ordine con due variabili indipendenti a forma canonica. Teorema di Cauchy-Kowalewsky.

Equazioni di tipo iperbolico. Equazione della corda vibrante. Oscillazioni di una corda illimitata: soluzione di D'Alembert. Caso della corda finita. Equazioni iperboliche con due variabili indipendenti: problema di Cauchy e teorema di esistenza. Equazione omogenea delle onde nel caso tridimensionale. Metodo della media sferica. Formula di Poisson. Metodo della discesa. Onde cilindriche. Equazione non omogenea: principio di Duhamel. Problema di Cauchy: caratteristiche. Problema misto: unicità e dipendenza continua. Metodo di Fourier per l'equazione delle onde nel caso unidimensionale.

Equazioni di tipo parabolico. Primo problema ai valori al contorno per l'equazione del calore. Teorema del massimo. Unicità e dipendenza continua. Metodo di Fourier per l'equazione del calore nel caso unidimensionale. Problema di Cauchy per l'equazione del calore. Soluzione fondamentale. Teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua.

Equazioni di tipo ellittico. Equazione di Laplace. Formula di Green. Soluzione del problema interno di Dirichlet per una sfera. Soluzione del problema esterno di Dirichlet per una sfera. Comportamento di un'arbitraria funzione armonica all'infinito. Teorema di unicità per il problema di Neumann. Applicazioni. Cenni sull'equazione di Poisson.

2. Elementi di meccanica dei continui – Fluidi viscosi

Cenni di teoria dei campi. Gradiente, divergenza, rotore. Campi conservativi. Gradiente e divergenza di un campo tensoriale. Cinematica dei sistemi continui. Punti di vista lagrangiano ed euleriano. Rappresentazione lagrangiana del moto. Rappresentazione euleriana del moto. Linee di corrente e linee di flusso. Identità cinematiche. Formula di Eulero, teorema del trasporto. Formula fondamentale della cinematica dei sistemi continui. Coefficienti di dilatazione lineare e cubica. Deformazioni angolari. L'atto di moto rigido come caso particolare di un generico atto di moto continuo.

Dinamica dei mezzi continui. Bilancio della massa, equazione di continuità. Assioma degli sforzi di Cauchy. Bilancio della quantità di moto e del momento delle quantità di moto. Teorema di Cauchy e tensore degli sforzi. Equazione locale del bilancio della quantità di moto. Equazione locale del bilancio del momento delle quantità di moto, simmetria del tensore degli sforzi. Teorema dell'energia cinetica per i sistemi continui. Bilancio dell'energia: primo principio della termodinamica. Secondo principio della termodinamica. Fluidi perfetti: equazione costitutiva dei fluidi non viscosi. Equazione caratteristica dei fluidi perfetti. Fluido perfetto barotropico in equilibrio sotto l'azione di forze conservative. Teorema di Bernoulli. Grandezze oggettive. Processi termocinetici e termodinamici. Storia di una funzione. Assiomi fondamentali delle equazioni costitutive. Una classe di sistemi continui omogenei senza memoria.

Fluidi stokesiani. Rappresentazione del tensore degli sforzi nei fluidi stokesiani. Pressione. Fluidi polinomiali. Fluidi newtoniani. Tensore degli sforzi viscosi: funzione di dissipazione. Il problema del moto dei fluidi newtoniani. Equazione di Navier-Stokes. Condizioni al contorno. Equazioni adimensionali. Problema ai valori iniziali e al contorno per le equazioni di Navier-Stokes. Soluzioni classiche. Esempi di soluzioni classiche. Moti piani di Couette e di Poiseuille. Equazioni di moto di un fluido newtoniano incompressibile. Equazione del moto differenziale. Equazione dell'energia. Teorema di unicità. Disuguaglianza di Poincaré. Stabilità di un fluido viscoso incompressibile. Metodo di stabilità lineare e metodo di Lyapunov. Stabilità in energia. Teoremi di stabilità universale di Serrin. Problema variazionale associato. Cenno ai problemi di convezione: problema di Bénard.

Riferimenti bibliografici

- [1] G. MULONE, *Appunti di equazioni a derivate parziali della fisica matematica*.
- [2] M.M. SMIRNOV, *Second-Order partial differential equations*, ed. Noordhoff.
- [3] F.JOHN, *Partial differential equations*, Springer-Verlag.
- [4] V.I. SMIRNOV, *Corso di matematica superiore II*, Editori Riuniti.
- [5] J. FLAVIN, S. RIONERO, *Qualitative estimates for partial differential equations. An introduction*. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1996.
- [6] N.S.KOSHYLYAKOV, M.M.SMIRNOV, E.B.GLINER, *Differential equations of mathematical physics*, ed. North-Holland.
- [7] A.N.TICHONOV, A.A. SAMARSKIJ, *Equazioni della fisica matematica*, ed. Mir.
- [8] L.C. EVANS, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [9] H. LEVINE, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1997.
- [10] G. MULONE, *Appunti di elementi di meccanica dei continui*.
- [11] T. MANACORDA, *Introduzione alla termomeccanica dei continui*, QUMI, ed. Pitagora.
- [12] S. RIONERO, *Lezioni di Meccanica Razionale*, ed. Liguori.
- [13] J. SERRIN, *Mathematical principles of Classical Fluid Mechanics, Handbuk der Phisick VIII/1*, 1959.
- [14] C. TRUESDELL, *The elements of continuum Mechanics*, ed. Springer-Verlag.